数理解析研究所講究録
558巻 1985年 114-126

球面上のSherman変換について

上智大理工　和田 涼子　(Ryoko Wada)

§0. まえがき

d次元単位球面$S=S^d$上のある種の函数(超函数) fは$f=\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ (f_nはn次球面調和函数)という形に一意的に展開でき，S上の種々の函数空間は 数列$\{\|f_n\|_{S,2}\}_{n=0,1,2\cdots}$の増大度によって特徴づけられる。($\|\ \|_{S,2}$は$S$上の$L^2$ノルム)

一方 T.O. Sherman [8] はS上の函数に $B\times\mathbb{Z}_+$ ($B=\{s\in S;\ s\cdot a=0\}$, $a=(1,0,\cdots,0)\in S$, $\mathbb{Z}_+=\{0,1,2,\cdots\}$) 上の函数を対応させる変換$f\longrightarrow Ff(b,n)$, $f\longrightarrow F_* f(b,n)$を導入し，それらを用いた新しい形の函数展開の方法を提唱した。

いま $f=\sum_{n=0}^{\infty} f_n$について$F_\# f(b,n)=F_* f_n(b,n)$と定義すると，Sherman [8] の$F_* f(b,n)$についての結果が$F_\# f(b,n)$についても成り立つことがわかる。さらに$F_* f(b,n)$はなめらかな函数にしか定義できないが，$F_\# f(b,n)$はより一般の函数や超函数にも定義することができる。$Ff(b,n)$, $F_\# f(b,n)$は ともにB上のn次以下の多項式になる。ここでS上の函数空間から

B上の多項式の列の空間への2つの写像

$$F: f \longrightarrow \{Ff(\ ,n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$$

$$F_\#: f \longrightarrow \{F_\# f(\ ,n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$$

を考えると，Shermanの結果から F と $F_\#$ はある意味で双対性を持つことがわかる。ここでは F, $F_\#$ を各々第一種および第2種のSherman変換とよぶことにし，F, $F_\#$ による函数空間の対応について調べる。（[9]では F をSherman transformation，$F_\#$ をmodified Sherman transformationとよんでいる。）

§1. 準備

d を自然数とする。$x=(x_1,\cdots,x_{d+1})$, $y=(y_1,\cdots,y_{d+1})\in\mathbb{R}^{d+1}$ について 内積 $x\cdot y$ とノルム $\|x\|$ を各々

$$x\cdot y=\sum_{j=1}^{d+1}x_j y_j,$$

$$\|x\|=\sqrt{x\cdot x}$$

で定める。$S=S^d=\{s\in\mathbb{R}^{d+1}:\|s\|=1\}$, $a=(1,0,\cdots,0)\in S$, $B=\{b\in S: a\cdot b=0\}$ とおく。ds, db は各々 S 上および B 上のHaar測度で $\int_S 1\,ds=1$, $\int_B 1\,db=1$ とする。$\|\ \|_{S,2}$ $\|\ \|_{B,2}$ は各々 S 上および B 上の L^2 ノルムを表わす。$\mathbb{P}_n(B)$ を B 上の n 次以下の多項式の全体，$\mathbb{H}_{n,d}$ を $(d+1)$ 次元 n 次の球面調和函数の全体とする。$n\neq m$ のとき $\mathbb{H}_{n,d}$ と $\mathbb{H}_{m,d}$ は直交する。す

なわち，$f\in \mathbb{H}_{n,d}$，$g\in \mathbb{H}_{m,d}$ならば

$$\int_S f(s)\, g(s)\, ds = 0$$

が成り立つ。$\dim \mathbb{H}_{n,d}$ で $\mathbb{H}_{n,d}$ の次元を表わす。

$$\dim \mathbb{H}_{n,d} = \frac{(2n+d-1)\,\Gamma(n+d-1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(d)} = O(n^{d-1}).$$

球面調和函数については Müller [7] を参照のこと。

$\mathcal{D}$ で S 上の C^∞ 級函数を表わす。$\mathcal{A}(S)$ を S 上の実解析函数の空間とする。$\tilde{S}$ で複素 d 次元の複素球面 $\{z=(z_1,\cdots,z_{d+1})\in \mathbb{C}^{d+1},\ z_1^2+\cdots+z_{d+1}^2=1\}$ を表わす。$\mathcal{O}(\tilde{S})$ を $\tilde{S}$ 上の正則函数の全体とし，$\mathrm{Exp}(\tilde{S})$ を $\mathbb{C}^{d+1}$ 上の指数型整函数の $\tilde{S}$ 上への制限とする。これらの空間については詳しくは Morimoto [6] を参照。$\mathcal{D}'$, $\mathcal{A}'(S)$, $\mathcal{O}'(\tilde{S})$, $\mathrm{Exp}'(\tilde{S})$ で各々 $\mathcal{D}$, $\mathcal{A}(S)$, $\mathcal{O}(\tilde{S})$, $\mathrm{Exp}(\tilde{S})$ の双対空間を表わすことにする。

$P_{n,d}(t)$ $(t\in\mathbb{R})$ を $(d+1)$ 次元 n 次の Legendre 函数とする。すなわち $-1\leq t\leq 1$ について

$$P_{n,d}(t) = \left(\frac{-1}{2}\right)^n \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(n+\frac{d}{2})}(1-t^2)^{\frac{2-d}{2}} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (1-t^2)^{\frac{2n+d-2}{2}}$$

(Rodorigues の公式).

$s\in S$ を固定すると $P_{n,d}(\cdot s)\in \mathbb{H}_{n,d}$ となる。$f'\in \mathrm{Exp}'(\tilde{S})$ の時

$$f'_n(s) = \dim \mathbb{H}_{n,d} \langle f', P_{n,d}(\cdot s)\rangle \quad (s\in \tilde{S})$$

とおくと $f'_n\in \mathbb{H}_{n,d}$ であり，$f'\in \mathrm{Exp}'(\tilde{S})$ (resp. $\mathcal{O}'(\tilde{S})$,

$\mathcal{A}'(S)$, $\mathcal{D}'$, $L^2(S)$), $f \in Exp(\tilde{S})$ (resp. $\mathcal{O}(\tilde{S})$, $\mathcal{A}(S)$, $\mathcal{D}$, $L^2(S)$)について

$$\langle f', f \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_S f_n'(s) f(s)\, ds$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_S f_n'(s) f_n(s)\, ds$$

が成り立つ。f_n'をf'のn次球面調和成分という。前述の空間は球面調和成分の増大度によって特徴づけられることが知られており，Morimoto[6]に次のようにまとめられている。

定理1.1.

(1.1) $\quad f' \in Exp'(\tilde{S}) \iff \overline{\lim_{n\to\infty}} (\|f_n'\|_{S,2}/n!)^{1/n} = 0,$

(1.2) $\quad f' \in \mathcal{O}'(\tilde{S}) \iff \overline{\lim_{n\to\infty}} (\|f_n'\|_{S,2})^{1/n} < \infty,$

(1.3) $\quad f' \in \mathcal{A}'(S) \iff \overline{\lim_{n\to\infty}} (\|f_n'\|_{S,2})^{1/n} \leq 1,$

(1.4) $\quad f' \in \mathcal{D}' \iff \{\|f_n'\|_{S,2}\}_{n\in \mathbb{Z}_+}$ は緩増加，

(1.5) $\quad f \in L^2(S) \iff \{\|f_n\|_{S,2}\}_{n\in \mathbb{Z}_+} \in \ell^2,$

(1.6) $\quad f \in \mathcal{D} \iff \{\|f_n\|_{S,2}\}_{n\in \mathbb{Z}_+}$ は急減少，

(1.7) $\quad f \in \mathcal{A}(S) \iff \overline{\lim_{n\to\infty}} (\|f_n\|_{S,2})^{1/n} < 1,$

(1.8) $\quad f \in \mathcal{O}(\tilde{S}) \iff \overline{\lim_{n\to\infty}} (\|f_n\|_{S,2})^{1/n} = 0,$

(1.9) $\quad f \in Exp(\tilde{S}) \iff \overline{\lim_{n\to\infty}} (n!\,\|f_n\|_{S,2})^{1/n} < \infty.$

§2. 第1種のSherman変換

$(b, n) \in B \times \mathbb{Z}_+$について

$$e(b,n)(s) = (a\cdot s + i\, b\cdot s)^n \quad (s \in S)$$

とおく。$f' \in Exp'(\tilde{S})$について

$$Ff'(b,n) = \langle f', e(b,n)\rangle$$

とおく。$e(b,n) \in \mathbb{H}_{n,d}$なので，$\mathbb{H}_{n,d}$の直交性より$Ff'(b,n) = Ff_n'(b,n)$であり，$f \in L^2(S)$については

$$Ff(b,n) = \int_S f(s)e(b,n)(s)\,ds$$

である。あきらかに$Ff(b,n)$は$\mathbb{P}_n(B)$の元である．ここで対応

$$F:\ f' \in Exp'(\tilde{S}) \longrightarrow \{Ff'(\ ,n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$$

を第1種のSherman変換とよぶことにする．$d=1$の時は$Ff(b,n)$は通常のFourier係数と一致するので，ここでは$d \geqq 2$を仮定する。S上の各函数空間のFによる像を表わすために$\prod \mathbb{P}_n(B) = \{\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+};\ g_n \in \mathbb{P}_n(B)\}$のいくつかの部分空間を定義する．

$$L = \{\{g_n\} \in \prod \mathbb{P}_n(B);\ \{\|g_n\|_{B,2}\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \in \ell_d^2\},$$

$$L^\pm = \{\{g_n\} \in \prod \mathbb{P}_n(B);\ \{2^{\pm n} n^{\mp\frac{1}{4}} \|g_n\|_{B,2}\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \in \ell_d^2\},$$

（複号同順）

$$D = \{\{g_n\} \in \prod \mathbb{P}_n(B);\ \{\|g_n\|_{B,2}\}_{n\in\mathbb{Z}_+}\text{ は急減少}\},$$

$$D^\pm = \{\{g_n\} \in \prod \mathbb{P}_n(B);\ \{2^{\pm n}\|g_n\|_{B,2}\}_{n\in\mathbb{Z}_+}\text{ は急減少}\},$$

（複号同順）

$$D' = \{\{g_n\} \in \prod \mathbb{P}_n(B);\ \{\|g_n\|_{B,2}\}_{n\in\mathbb{Z}_+}\text{ は緩増加}\},$$

$$D'^{\pm} = \{\{g_n\} \in \Pi \mathbb{P}_n(B) ; \{2^{\pm n} \|g_n\|_{B,2}\} \text{ は緩増加}\}$$

（複号同順），

$$A(\eta) = \{\{g_n\} \in \Pi \mathbb{P}_n(B) ; \overline{\lim_{n\to\infty}} (\|g_n\|_{B,2})^{1/n} < \eta\},$$

$$A[\eta] = \{\{g_n\} \in \Pi \mathbb{P}_n(B) ; \overline{\lim_{n\to\infty}} (\|g_n\|_{B,2})^{1/n} \leq \eta\},$$

$$\mathcal{O} = A[0] = \{\{g_n\} \in \Pi \mathbb{P}_n(B) ; \overline{\lim_{n\to\infty}} (\|g_n\|_{B,2})^{1/n} = 0\},$$

$$\mathcal{O}' = A(\infty) = \{\{g_n\} \in \Pi \mathbb{P}_n(B) ; \overline{\lim_{n\to\infty}} (\|g_n\|_{B,2})^{1/n} < \infty\},$$

$$\mathbb{E} = \{\{g_n\} \in \Pi \mathbb{P}_n(B) ; \overline{\lim_{n\to\infty}} (n! \|g_n\|_{B,2})^{1/n} < \infty\},$$

$$\mathbb{E}' = \{\{g_n\} \in \Pi \mathbb{P}_n(B) ; \overline{\lim_{n\to\infty}} (\|g_n\|_{B,2}/n!)^{1/n} = 0\}.$$

ここで $l_d^2 = \{\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} ; \sum_{n=0}^{\infty} \dim \mathbb{H}_{n,d} |a_n|^2 < \infty\}$ とする。このとき次が成り立つ。

定理2.1. F は $\mathrm{Exp}'(\tilde{S})$ から $\Pi \mathbb{P}_n(B)$ への1対1の線型写像で次をみたす。

(2.1) $\quad \mathbb{L}^+ \subset F(L^2(S)) \subset \mathbb{L}$,

(2.2) $\quad D^+ \subset F(\mathcal{D}) \subset D$,

(2.3) $\quad D'^+ \subset F(\mathcal{D}') \subset D'$,

(2.4) $\quad A(\frac{1}{2}) \subset F(\mathcal{A}(S)) \subset A(1)$,

(2.5) $\quad A[\frac{1}{2}] \subset F(\mathcal{A}'(S)) \subset A[1]$,

(2.6) $\quad F : \mathcal{O}(\tilde{S}) \longrightarrow \mathcal{O}$ は全単射,

(2.7) $\quad F : \mathcal{O}'(\tilde{S}) \longrightarrow \mathcal{O}'$ は全単射,

(2.8) $\quad F : \mathrm{Exp}(\tilde{S}) \rightarrow \mathbb{E}$ は全単射

(2.9) $F: \mathrm{Exp}'(\tilde{S}) \to E'$ は全単射。

略証) $s \in S$ を $s = ra + \sqrt{1-r^2}\, b$ $(-1 \le r \le 1,\ b \in B)$ とおくとき，$\{S_{j,k}\}_{1 \le k \le \dim H_{j,d+1}}$ が $H_{j,d+1}$ の直交基底ならば $\{(1-r^2)^{j/2} P_{n-j,2j+d}(r)\, S_{j,k}(b)\}_{1 \le k \le \dim H_{j,d+1},\, 0 \le j \le n}$ は $H_{n,d}$ の直交基底になる (Müller [7] Lemma 15). よって $f' \in \mathrm{Exp}'(\tilde{S})$ の n 次球面調和成分 f'_n について $S_{n,j} \in H_{j,d+1}$ $(0 \le j \le n)$ が存在して

$$f'_n(s) = f'_n(ra + \sqrt{1-r^2}\, b) = \sum_{j=0}^{n} (1-r^2)^{j/2} P_{n-j,2j+d}(r)\, S_{n,j}(b)$$

と表わせる。このとき

(2.10) $$Ff'(b,n) = \sum_{j=0}^{n} \phi(n,j,d)\, S_{n,j}(b),$$

(2.11) $$\phi(n,j,d) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^j \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) n!}{\Gamma\left(j + \frac{d+1}{2}\right)(n-j)!\, \dim H_{n-j,2j+d}}$$

が成り立つ (Sherman [8] P.25～)。(2.10), (2.11) より F が1対1であることおよび $f' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n \in \mathrm{Exp}'(\tilde{S})$ について

(2.12) $$C \times 2^{-n} n^{1/4} \| f'_n \|_{S,2} \le (\dim H_{n,d})^{1/2} \| Ff'(\ ,n) \|_{B,2} \le \| f'_n \|_{S,2}$$

がわかる (C は定数)。(2.1)-(2.9) は (2.12) と定理1.1からいえる。//

注意) 定理2.1 (2.1)-(2.5) において $L^+ \subsetneq F(L^2(S)) \subsetneq L$, $D^+ \subsetneq F(\mathscr{S}) \subsetneq D$, $D'^+ \subsetneq F(\mathscr{S}') \subsetneq D'$, $A(\frac{1}{2}) \subsetneq F(\mathcal{A}(S)) \subsetneq A(1)$, $A[\frac{1}{2}] \subsetneq F(\mathcal{A}'(S)) \subsetneq A[1]$ である。たとえば $\forall n \in Z_+$ について $S_n \in H_{n,d+1}$ かつ $\|S_n\|_{B,2} = (p/2)^n$ $(1<p<2)$ であるような $\{S_n\}_{n \in Z_+} \in \prod P_n(B)$ を考えると $\{S_n\}_{n \in Z_+} \in A(1)$ であ

るが，$\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}\notin F(\mathcal{A}'(S))$ である。また $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\eta^n P_{n,d}(s\cdot a)$ $(1/2<\eta<1)$ を考えると $f\in\mathcal{A}(S)$ であるが $F(f)\notin A[\frac{1}{2}]$ である。

さらに $\frac{1}{2}<\eta<1$ なる任意の η について $A(\eta)\not\supset F(\mathcal{A}(S))$, $F(\mathcal{A}(S))\not\supset A(\eta)$, $A[\eta]\not\supset F(\mathcal{A}'(S))$, $A[\eta]\notin F(\mathcal{A}'(S))$ となる例も作ることができる。

§3. 第２種のSherman変換

$f'=\sum_{n=0}^{\infty}f'_n\in Exp'(\tilde{S})$, $f'_n(ra+\sqrt{1-r^2}\,b)=\sum_{j=0}^{n}(1-r^2)^{j/2}P_{n-j,2j+d}(r)S_{n,j}(b)$, $S_{n,j}\in\mathbb{H}_{j,d-1}$ のとき，

(3.1) $$F_\# f'(b,n)=\sum_{j=0}^{n}\phi_\#(n,j,d)S_{n,j}(b),$$

(3.2) $$\phi_\#(n,j,d)=\frac{(-2i)^j\,\Gamma(j+\frac{d}{2})\,(n-j)!}{\Gamma(d/2)\,n!\,\dim\mathbb{H}_{n,d}}$$

とおく。対応 $f\in\mathbb{H}_{n,d}\to F_\# f(b,n)\in\mathbb{P}_n(B)$ は

$$\int_S f(s)g(s)\,ds=\dim\mathbb{H}_{n,d}\int_B Ff(b,n)F_\# g(b,n)\,db$$

$(f,g\in\mathbb{H}_{n,d})$ をみたす唯一の $\mathbb{H}_{n,d}$ から $\mathbb{P}_n(B)$ への全単射の線型写像である。また T.O. Sherman は [8] で対応 $f\in\mathcal{D}\to F_* f(b,n)$ を導入したが，$F_\# f(b,n)$ と $F_* f(b,n)$ には $F_\# f(b,n)=F_* f_n(b,n)$ という関係があり，$d=1$ のとき $F_\# f(b,n)$, $F_* f(b,n)$ は Fourier係数と一致する。

$Exp'(\tilde{S})$ から $\Pi\,\mathbb{P}_n(B)$ への変換 $F_\#: f'\to\{F_\# f'(\ ,n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ を第２種のSherman変換とよぶことにする。F と $F_\#$ は次の意味で

双対性をもつ。

命題3.1.(Sherman [8] Theorem 3.8) $f \in Exp(\tilde{S})$ (resp. $\mathcal{O}(\tilde{S})$, $\mathcal{a}(S)$, $\mathcal{D}$, $L^2(S)$)), $f' \in Exp'(\tilde{S})$ (resp. $\mathcal{O}'(\tilde{S})$, $\mathcal{a}'(S)$, $\mathcal{D}'$, $L^2(S)$)) について次が成り立つ。

$$\langle f', f \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \dim \mathbb{H}_{n,d} \int_B Ff(b,n)\, F_{\#}f'(b,n)\, db$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \dim \mathbb{H}_{n,d} \int_B Ff'(b,n)\, F_{\#}f(b,n)\, db.$$

$F_{\#}$による函数空間の対応については 次が成り立つ. ($d \geqq 2$ とする).

定理3.2. $F_{\#}$は$Exp'(\tilde{S})$から$\prod \mathbb{H}_n(B)$への1対1の線型写像で次をみたす.

(3.3) $L \subset F_{\#}(L^2(S)) \subset L^-$,

(3.4) $D \subset F_{\#}(\mathcal{D}) \subset D^-$,

(3.5) $D' \subset F_{\#}(\mathcal{D}') \subset D'^-$,

(3.6) $A(1) \subset F_{\#}(\mathcal{a}(S)) \subset A(2)$,

(3.7) $A[1] \subset F_{\#}(\mathcal{a}'(S)) \subset A[2]$,

(3.8) $F_{\#}: \mathcal{O}(\tilde{S}) \longrightarrow \mathcal{O}$は全単射,

(3.9) $F_{\#}: \mathcal{O}'(\tilde{S}) \longrightarrow \mathcal{O}'$は全単射,

(3.10) $F_{\#}: Exp(\tilde{S}) \longrightarrow \mathbb{E}$は全単射,

(3.11) $F_\#: Exp'(\tilde{S}) \longrightarrow \mathbb{E}'$は全単射。

略証) 定義より$F_\#$は1対1の線型写像であり，$f' \in Exp'(\tilde{S})$について次の不等式が成り立つ。

(3.12) $\|f'_n\|_{S,2} \le (\dim \mathbb{H}_{n,d})^{1/2} \|F_\# f'(\ ,n)\|_{B,2} \le C \cdot 2^n n^{-\frac{1}{4}} \|f'_n\|_{S,2}$,

ここでCは定数である。(3.3)-(3.11)は(3.12)と定理1.1より得られる。//

注意) (3.3)-(3.7)で$\mathbb{L} \subsetneq F_\#(L^2(S)) \subsetneq \mathbb{L}^-$, $D \subsetneq F_\#(\mathcal{D}) \subsetneq D^-$, $D' \subsetneq F_\#(\mathcal{D}') \subsetneq D^-$, $A(1) \subsetneq F_\#(\mathcal{A}(S)) \subsetneq A(2)$, $A[1] \subsetneq F_\#(\mathcal{A}'(S)) \subsetneq A[2]$である。また$1<\eta<2$なる任意の$\eta$について$A(\eta) \not\subset F_\#(\mathcal{A}(S))$, $A(\eta) \not\supset F_\#(\mathcal{A}(S))$, $A[\eta] \not\subset F_\#(\mathcal{A}'(S))$, $A[\eta] \not\supset F_\#(\mathcal{A}'(S))$となる例も作れる。

§4. Fantappié indicatorとの関係

$\mathbb{P}_{d+1}(\mathbb{C})$で$(d+1)$次元複素射影空間を表わし その元を$(\xi_0 : \xi)$ ($\xi_0 \in \mathbb{C}$, $\xi \in \mathbb{C}^{d+1}$)と書く。Kを$\mathbb{C}^{d+1}$のcompact集合とするとき

$$\overset{*}{C}K = \{(\xi_0 : \xi) \in \mathbb{P}_{d+1}(\mathbb{C})\ ;\ \forall z \in K \text{について } \xi_0 + \xi \cdot z \neq 0\}$$

とおく。ここで$\xi \cdot z = \xi_1 z_1 + \cdots + \xi_{d+1} \cdot z_{d+1}$ ($\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_{d+1})$, $z = (z_1, \cdots, z_{d+1})$)である。

$\mathcal{O}(K)$でKのまわりで正則な函数の全体を表わす。$T \in \mathcal{O}'(K)$,

$(\xi_0, \xi) \in \tilde{\mathbb{C}}K$ について

$$\Phi_T(\xi_0 : \xi) = \langle T, \frac{\xi_0}{\xi_0 + \xi \cdot z} \rangle$$

を Fantappié indicator とよぶ。(詳しくは Martineau [2][3][4] 参照)。

ここで $f' \in \mathcal{A}'(S)$, $z \in \mathbb{C}$ について次の級数

(4.1) $\quad \mathcal{F}f'(b, z) = \sum_{n=0}^{\infty} Ff'(b, n) z^n$

を考える。$|z| < 1$ なる $z \in \mathbb{C}$ を固定すると

$$\sum_{n=0}^{\infty} Ff'(b, n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f', z^n e(b, n) \rangle$$

である。一般に $\{f_n \in \mathbb{H}_{n,d}\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ が $\overline{\lim_{n\to\infty}} \|f_n\|_{S,2}^{1/n} < 1$ をみたすとき $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ はある $\mathcal{A}(S)$ の元に $\mathcal{A}(S)$ の位相で収束する (Morimoto [5][6] 等を参照せよ)。$|z| < 1$ より $\overline{\lim_{n\to\infty}} \|z^n e(b, n)\|_{S,2}^{1/n} < 1$ なので

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle f', z^n e(b, n) \rangle = \langle f', \sum_{n=0}^{\infty} z^n e(b, n) \rangle.$$

ここで

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n e(b, n)(s) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n (a \cdot s + i b \cdot s)^n$$

$$= \frac{1}{1 - z(a + i b) \cdot s}$$

だから

(4.2) $\quad \mathcal{F}f'(b, z) = \langle f'_s, \frac{1}{1 - z(a + i b) \cdot s} \rangle$

$$= \Phi_{f'}(1 : -z(a + i b)) \qquad (K = S)$$

が成り立つ。つまり$\mathfrak{F}f'(\mathfrak{b}, z)$はFantappié indicator $\Phi_{f'}$の制限になっている。ここで定理2.1から$\mathfrak{F}f'(\mathfrak{b}, z)$のいくつかの性質が得られる。

定理4.1. 1) $f' \in \mathcal{A}(S) \Rightarrow \mathfrak{F}f'(\mathfrak{b}, z)$は$|z|<1$で正則。

2) $f \in \mathcal{D} \Longrightarrow \mathfrak{F}f(\mathfrak{b}, z)$は$|z|<1$で正則かつ$\mathfrak{F}f(\mathfrak{b}, z)$のすべての導函数が$|z| \leq 1$で連続。

3) $f \in \mathcal{A}(S) \Longrightarrow \mathfrak{F}f(\mathfrak{b}, z)$は$|z| \leq 1$で正則。

4) $f \in \mathcal{O}(\tilde{S}) \Longrightarrow \mathfrak{F}f(\mathfrak{b}, z)$は$z$について整函数。

5) $f \in \mathrm{Exp}(\tilde{S}) \Rightarrow \mathfrak{F}f(\mathfrak{b}, z)$は$z$について指数型整函数。

略証） $\rho_{\mathfrak{b}}$を$\mathfrak{F}f'(\mathfrak{b}, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{F}f'(\mathfrak{b}, n) z^n$の収束域とする。

$\|g\|_B = \sup_{\mathfrak{b} \in B} |g(\mathfrak{b})|$とおくと

$$\rho_{\mathfrak{b}} = \frac{1}{\overline{\lim_{n \to \infty}} |Ff'(\mathfrak{b}, n)|^{1/n}} \geqslant \frac{1}{\overline{\lim_{n \to \infty}} \|Ff'(\ , n)\|_B}$$

となる。$g \in \mathbb{P}_n(B)$のとき$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|g\|_B^{1/n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \|g\|_{B,2}^{1/n}$がたしかめられるので，$\mathfrak{F}f'(\mathfrak{b}, z)$は$|z| \leq 1 / \overline{\lim} \|Ff'(\ , n)\|_{B,2}^{1/n}$で正則であることがわかる。よって定理2.1から1)-4)が言える。

一般に$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$が指数型$\leq M$の整函数である必要十分条件は$\overline{\lim_{n\to\infty}} (n!|a_n|)^{1/n} \leq M$となることである.(Boas[1])。(5)はこれより得られる。//

参考文献

[1] R. P. Boas, Entire Functions, Academic Press, New York, 1954.

[2] A. Martineau, Équations différentielles d'ordre infini, Bull. Soc. Math. de France. 95, 1967, 109 - 154.

[3] A. Martineau, Sur la notion d'ensemble fortement linéellement convexe, An. Acad. Brasil. Ci., 40 (1968), 427 - 435.

[4] A. Martineau, Uncité du support d'une fonctionnelle analytique, un théorème de C. O. Kiselman, Bull. Sci. Math., 92 (1968), 131 - 141.

[5] 森本光生，球面上の超函数，上智大学数学講究録 NO. 12, 上智大学数学教室 1982.

[6] M. Morimoto, Analytic functionals on the sphere and their Fourier-Borel transformations, Complex Analysis, Banach Center Publications, 11, PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1983, 223-250.

[7] C. Müller, Spherical Harmonics, Lecture Notes in Math., 17, 1966, Springer.

[8] T. O. Sherman, Fourier analysis on the sphere, Trans. Amer. Math. Soc., 209 (1975), 1-31.

[9] R. Wada, Sherman transformations for functions on the sphere, to apper.